微分方程式・自習シート

定義 1　ベクトル $\vec{\alpha}=(a,b)$, $\vec{\beta}=(c,d)$ と実数 ℓ, m に対して次の方程式

$$\ell\vec{\alpha}+m\vec{\beta}=\vec{0}$$

が成立すると仮定する, つまり, (ℓ, m) を未知数とする次の連立方程式

$$\begin{cases} \ell a+mc=0, \\ \ell b+md=0 \end{cases}$$

が成立すると仮定する．この連立方程式の解 (ℓ, m) は $\ell=0$, $m=0$ しかあり得ないとき, **ベクトル $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ は線形独立である**と呼ぶことにする．[1)]

問 1　例を参考に次の 2 つのベクトルの組は線形独立かどうか判定せよ.

(1) $\vec{\alpha}=(1,0)$, $\vec{\beta}=(-4,1)$

解答例

$$\ell\vec{\alpha}+m\vec{\beta}=\vec{0},$$

と仮定すると

$$\begin{cases} \ell-4m=0, \\ m=0, \end{cases}$$

これを解くと $\ell=0$, $m=0$ となるのでベクトル $\vec{\alpha}=(1,0)$, $\vec{\beta}=(-4,1)$ は線形独立である.

(2) $\vec{\alpha}=(2,-2)$, $\vec{\beta}=(1,-1)$

解答例

$$\ell\vec{\alpha}+m\vec{\beta}=\vec{0},$$

と仮定すると

$$\begin{cases} 2\ell+m=0, \\ -2\ell-m=0, \end{cases}$$

これは $2\ell+m=0$ しか意味しておらず, $2\ell+m=0$ を満たす数の組, 例えば $(\ell,m)=(1,-2)$ も連立方程式を満たしている．よって, この連立方程式の解 (ℓ,m) は $(0,0)$ 以外にもあるのでベクトル $\vec{\alpha}=(2,-2)$, $\vec{\beta}=(1,-1)$ は線形独立でない.

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

[1)] あえて「$\ell=0$, $m=0$ しかあり得ないとき」という表現を使っているが, 一般に数学では「P を仮定するとき, $\ell=0$, $m=0$ ならば」という表現であってもそれは「P を仮定するとき, $\ell=0$, $m=0$ しかあり得ないとき」という意味である．注として, $\ell=0$, $m=0$ は連立方程式

$$\begin{cases} \ell a+mc=0, \\ \ell b+md=0 \end{cases}$$

を満たす．それ以外に解があるかないかという点が問題である.

定義 2　ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ と実数 ℓ, m, n に対して次の方程式

$$\ell\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0},$$

が成立すると仮定する．この方程式の解 (ℓ, m, n) は $\ell=0$, $m=0$, $n=0$ しかあり得ないとき, ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は線形独立であると呼ぶことにする.

問 2　ベクトル $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(2,-1,4)$, $\vec{c}=(-1,2,3)$ は線形独立であることを証明せよ.

証明

$$\ell\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0},$$

と仮定すると

$$\begin{cases} \ell+2m-n=0, \\ -m+2n=0, \\ \ell+4m+3n=0, \end{cases}$$

これを解くと $\ell=0$, $m=0$, $n=0$ となるのでベクトル $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(2,-1,4)$, $\vec{c}=(-1,2,3)$ は線形独立である.