

微分方程式・自習シート

問1 次の計算をせよ.

$$(1) \int e^y dy$$

$$(2) \int \frac{1}{y} dy$$

$$(3) \int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx$$

$$(4) \int \tan x dx$$

$$(5) \int \frac{1}{N(1-N)} dN$$

問2 導関数の定義に従って次の関数を微分せよ.

$$(1) f(x) = x^3$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x}$$

問3 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能のとき、例題に従い次の極限が存在することを確認し、各極限を $f(a)$ と $f'(a)$ を用いて表せ.

例題 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h}$

$\frac{f(a+2h) - f(a)}{h} = 2 \cdot \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h}$ である. ここで、関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能なので $h \rightarrow 0$ のとき $2h \rightarrow 0$ に注意して

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{2h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h}$$

が存在する. よって問題の極限は存在し

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} &= \lim_{2h \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} \\ &= 2 \lim_{2h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} \\ &= 2f'(a) \end{aligned}$$

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h}$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$$