

微分方程式・自習シート

問1 次の微分方程式について以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} xy' = xy^3 - y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(1) $u = xy$ の変換を用いて, まずは一般解が

$$y^2 = \frac{1}{Cx^2 + 2x},$$

もしくは

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{Cx^2 + 2x}}$$

となることを示せ.

(2) 条件 $y(1) = 1$ を用いて C を決定し, 特解が

$$y = \sqrt{\frac{1}{-x^2 + 2x}}$$

となることを示せ.

問2 質量 m (正定数) の小球を真上に投げると次第に速度 $v = v(t)$ が小さくなり, 小球はある高さで一瞬止まってその点から落下する. この運動を分析すると, 初速度 v_0 で真上に投げられた小球は下向きに一定の加速度 g (正定数) の運動をしている:

$$F = -mg. \quad (\text{i})$$

一方, 投げた点を原点, 上向きを正の向きとして時間 t 後の位置を $h = h(t)$ とすると次のニュートンの法則が成立する:

$$F = ma = mv' = mh''. \quad (\text{ii})$$

よって, (i)–(ii) で F を消去すれば h は次の微分方程式に従う.¹⁾

$$\begin{cases} h'' = -g, \\ h'(0) = v_0, \\ h(0) = 0. \end{cases}$$

この微分方程式を次の手順で解き h を求めよ.

(1) $v = h'$ と変換してまずは v の1階微分方程式とみて v を求める.

(2) $h' = v$ を $h(0) = 0$ とともに解く.

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点しておくこと。提出しなくても試験で60点以上取れば合格です。

¹⁾文字がたくさん出てきたが、 a は加速度 (acceleration), v は速度 (velocity) を表し、それぞれ $a = h''$, $v = h'$ である。