# 偏微分方程式・自習シート

**問 1**　$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする. $f_n : I \to \mathbb{R}(n \in \mathbb{N})$ と $f : I \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たすならば $\{f_n\}$ は $f$ に $I$ 上一様収束することを証明せよ.

**証明**　任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N_\varepsilon, {}^\forall x \in I)$$

を示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 仮定よりある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$\left|\sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| - 0\right| < \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N_\varepsilon).$$

よって,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \\ &< \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N_\varepsilon, {}^\forall x \in I). \end{aligned}$$

以上より, $\{f_n\}$ は $f$ に $I$ 上一様収束する. □

**問 2**　関数列 $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は閉区間 $[0,1]$ 上で各点収束するが一様収束しないことを証明せよ.

**証明**　$f_n(x) := x^n : [0,1] \to \mathbb{R}$ とおく. このとき任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x \in [0,1)$ に対して, ある $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|x^n - 0| = x^n < \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N_{\varepsilon,x}).$$

一方, $x = 1$ においては

$$|x^n - 1| = |1^n - 1| = 0 < \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq 1).$$

よって

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N_{\varepsilon,x})$$

となり, $\{f_n\}$ は $f$ に $[0,1]$ 上で各点収束する.

　次に任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N_\varepsilon, {}^\forall x \in [0,1])$$

を満たすと仮定すると $\varepsilon := 1/2$ に対してもある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^N - 0| < \frac{1}{2} \quad ({}^\forall x \in [0,1))$$

となる. しかし, $f_N(x) := x^N$ は連続関数で $x = 1$ のとき $f_N(1) = 1$ より,

$$f_N(x) \to f_N(1) = 1 \quad (x \to 1),$$

$x=1$ に十分近い点 $x_0 \in [0,1)$ が存在して

$$f_N(x_0) = x_0^N > \frac{1}{2}.$$

実際, $x_0 \in (\sqrt[N]{1/2}, 1)$ を満たす点 $x_0$ について

$$\sqrt[N]{\frac{1}{2}} < x_0 < 1,$$

$$\frac{1}{2} < x_0^N < 1.$$

よって矛盾.

以上より $\{f_n\}$ は閉区間 $[0,1]$ 上で $f$ に各点収束するが一様収束しない.

**問 3**　$0<b<1$ とする. 関数列 $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は閉区間 $[0,b]$ 上で一様収束することを証明せよ.

**証明**　$f(x)=0$ $(x \in [0,b])$ とおく. 問 1 より

$$\sup_{t\in[0,b]} |f_n(t) - f(t)| = \max_{t\in[0,b]} |t^n - 0| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

を示せばよい. $f_n(t) = t^n$ の $[0,b]$ における最大値は $t=b$ で得られることと $0<b<1$ に注意すると

$$\max_{t\in[0,b]} |f_n(t)| = b^n \to 0 \quad (n\to\infty).$$

よって $\{f_n\}$ は閉区間 $[0,b]$ 上で $f$ に一様収束する.

**注**　問 3 の方法が問 2 では利用できなかった理由は, まず $f$ の定義が $x\in[0,1)$ と $x=1$ で異なることに注意する. その上で $x=1$ では問題ないが $x\in[0,1)$ で問 1 の条件を利用しようとすると

$$\sup_{t\in[0,1)} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t\in[0,1)} |t^n - 0| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

を示せばよいのだが, 区間が $[0,1)$ となっており,

$$\sup_{t\in[0,1)} |t^n - 0| = \sup_{t\in[0,1)} t^n = 1$$

となり, $b^n$ のときとは異なり, $n\to\infty$ としても収束しない.