2021/8/3/No.2

偏微分方程式・自習シート

問 1　T を $N\times N$ 正方行列 (a_{ij}) とする.

$$\|T\|_\infty := \max_{i,j=1,2,\ldots,N} |a_{ij}|,$$

$$\|T\|_1 := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}|,$$

とおくと, $\|T\|_\infty, \|T\|_1$ はそれぞれ, T のノルムとなることを示せ.

解答例　$\|T\|_\infty$ について: $T=(a_{ij}), S=(b_{ij})$ とする.
(i)

$$\begin{aligned}\|T\|_\infty &= \max_{i,j=1,2,\ldots,N} |a_{ij}| \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

もし $\|T\|_\infty = 0$ ならば, $\max_{i,j=1,2,\ldots,N}|a_{ij}| = 0$ より $|a_{ij}| = 0$ $({}^\forall i,j=1,2,\ldots,N)$. すなわち $T=O$. 逆に, $T=O$ ならば, $|a_{ij}|=0$ $({}^\forall i,j=1,2,\ldots,N)$ より $\|T\|_\infty = 0$.
(ii)

$$\begin{aligned}\|rT\|_\infty &= \max_{i,j} |ra_{ij}| \\ &= |r| \max_{i,j=1,2,\ldots,N} |a_{ij}| \\ &= |r|\|T\|_\infty \quad ({}^\forall r\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\|T+S\|_\infty &= \max_{i,j=1,2,\ldots,N} |a_{ij}+b_{ij}| \\ &\leq \max_{i,j=1,2,\ldots,N} \{|a_{ij}|+|b_{ij}|\} \\ &\leq \max_{i,j=1,2,\ldots,N} |a_{ij}| + \max_{i,j=1,2,\ldots,N} |b_{ij}| \\ &= \|T\|_\infty + \|S\|_\infty.\end{aligned}$$

以上より $\|T\|_\infty$ は T のノルムとなる.

$\|T\|_1$ について: $T=(a_{ij}), S=(b_{ij})$ とする.
(i)

$$\begin{aligned}\|T\|_1 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

もし $\|T\|_1 = 0$ ならば, $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}| = 0$ より $|a_{ij}| = 0$ $({}^\forall i,j=1,2,\ldots,N)$. すなわち $T=O$. 逆に, $T=O$ ならば, $|a_{ij}|=0$ $({}^\forall i,j=1,2,\ldots,N)$ より $\|T\|_1 = 0$.

(ii)

$$
\begin{aligned}
\|rT\|_1 &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|ra_{ij}| \\
&= |r|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}| \\
&= |r|\|T\|_1 \quad ({}^\forall r \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\|T+S\|_1 &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}+b_{ij}| \\
&\le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\{|a_{ij}|+|b_{ij}|\} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}| + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|b_{ij}| \\
&= \|T\|_1 + \|S\|_1.
\end{aligned}
$$

以上より $\|T\|_1$ は T のノルムとなる.

問 2　$T=(a_{ij}), S=(b_{ij})$ とおく.

$$
\|TS\|_1 \le \|T\|_1\|S\|_1
$$

を示せ. また

$$
T = S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}
$$

のとき

$$
\|TS\|_\infty \le \|T\|_\infty\|S\|_\infty
$$

は成立しないことを示せ.

$$
\begin{aligned}
\|TS\|_1 &= \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NN} \end{pmatrix} \right\|_1 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^N a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^N a_{1k}b_{kN} \\ \sum_{k=1}^N a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^N a_{2k}b_{k2} & & \sum_{k=1}^N a_{2k}b_{kN} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^N a_{Nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^N a_{Nk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^N a_{Nk}b_{kN} \end{pmatrix} \right\|_1 \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left| \sum_{k=1}^N a_{ik}b_{kj} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N |a_{ik}||b_{kj}| \\
&= \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^N |a_{ik}| \sum_{j=1}^N |b_{kj}| \right\} \\
&\leq \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N |a_{ik}| \right\} \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N |b_{kj}| \right\} \\
&= \|T\|_1 \|S\|_1.
\end{aligned}
$$

次に,

$$
T = S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}
$$

のとき

$$
\|TS\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 22.
$$

$$
\|T\|_\infty \|S\|_\infty = 4 \times 4 = 16.
$$

よって不成立.