2021/5/13

偏微分方程式・解説

ワイエルシュトラスの M 判定法を使うときに,

$$\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{|t-t_0|^k}{k!} \le \frac{M}{L}(e^{L|J|}-1) \tag{1}$$

を示した後,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{y}_n(t)|_{\mathbb{R}^N} &\le |\boldsymbol{y}_0|_{\mathbb{R}^N} + \sum_{k=1}^{n} |\boldsymbol{y}_k(t)-\boldsymbol{y}_{k-1}(t)|_{\mathbb{R}^N} \\ &\le |\boldsymbol{y}_0|_{\mathbb{R}^N} + \sum_{k=1}^{n} ML^{k-1}\frac{|t-t_0|^k}{k!}\end{aligned}$$

において右辺全体を M_n とおきましたが, そうすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(|\boldsymbol{y}_0|_{\mathbb{R}^N} + \sum_{k=1}^{n} ML^{k-1}\frac{|t-t_0|^k}{k!}\right)$$

となってしまいおかしくなります. 正しくはワイエルシュトラスの M 判定法を応用するのは $\boldsymbol{y}_n(t)$ ではなく $\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{y}_k(t)-\boldsymbol{y}_{k-1}(t))$ であって

$$\boldsymbol{y}_n(t) = \boldsymbol{y}_0 + \sum_{k=1}^{n}\big(\boldsymbol{y}_k(t)-\boldsymbol{y}_{k-1}(t)\big)$$

の和の部分だけに注目し

$$\boldsymbol{z}_k(t) := \boldsymbol{y}_k(t)-\boldsymbol{y}_{k-1}(t),$$

$$|\boldsymbol{z}_k(t)|_{\mathbb{R}^N} = |\boldsymbol{y}_k(t)-\boldsymbol{y}_{k-1}(t)|_{\mathbb{R}^N} \le ML^{k-1}\frac{|t-t_0|^k}{k!} =: M_k$$

とおき, (1) から

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k \le \frac{M}{L}(e^{L|J|}-1)$$

なのでワイエルシュトラスの M 判定法を $\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}_{k-1}$ に用いて関数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{z}_k = \sum_{k=1}^{\infty}\big(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}_{k-1}\big)$$

は J 上で一様収束し, さらに J 上連続であることをまず得ておきます. その後

$$\boldsymbol{y} := \boldsymbol{y}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}_{k-1}\big)$$

も J 上連続であると推論すべきでした.