2021/7/29

偏微分方程式・解説

$T=(a_{ij})$, $S=(b_{ij})$ $(i,j=1,2,\dots,N)$ とする. 不等式

$$\|TS\|\le\|T\|\|S\|$$

はどのようなノルムでも得られるわけではなく, 例えば講義で紹介したノルム

$$\|T\|_\infty:=\max_{i,j=1,2,\dots,N}|a_{ij}|$$

では不十分で, 別のノルム, 例えば

$$\|T\|_1:=\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N|a_{ij}|$$

$$\|T\|_2:=\left\{\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N|a_{ij}|^2\right\}^{1/2}$$

$$\|T\|_{B(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}:=\max_{j=1,2,\dots,N}\sum_{i=1}^N|a_{ij}|$$

などを用いる必要があります. よって,

$$\|T^k\|_\infty\le\|T\|_\infty^k$$

は一般に成立しませんが

$$\|T^k\|_1\le\|T\|_1^k$$

$$\|T^k\|_2\le\|T\|_2^k$$

$$\|T^k\|_{B(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}\le\|T\|_{B(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}^k$$

が成立します.

ここからは余談ですが, 念のため講義で行った議論を確認しておきます. 興味のある人は証明を追ってみて下さい. まず, $\|T\|_2$ や $\|T\|_B:=\|T\|_{B(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}$ も T のノルムであることを示します.

$\|T\|_2$ について: $T=(a_{ij}),S=(b_{ij})$ とする.
(i)

$$\begin{aligned}\|T\|_2&=\left\{\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N|a_{ij}|^2\right\}^{1/2}\\&\ge 0.\end{aligned}$$

もし $\|T\|_2=0$ ならば, $\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N|a_{ij}|^2=0$ より $|a_{ij}|^2=0$ $(^\forall i,j=1,2,\dots,N)$, つまり $|a_{ij}|=0$ $(^\forall i,j=1,2,\dots,N)$. すなわち $T=O$. 逆に, $T=O$ ならば, $|a_{ij}|=0$

($^\forall i, j = 1, 2, \ldots, N$) より $\|T\|_2 = 0$.
(ii)

$$\begin{aligned}
\|rT\|_2 &= \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |ra_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \\
&= |r| \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \\
&= |r| \|T\|_2 \quad (^\forall r \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

(iii) 補題 1 より

$$\begin{aligned}
\|T+S\|_2^2 &= \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij} + b_{ij}|^2 \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \{ |a_{ij}||a_{ij} + b_{ij}| + |b_{ij}||a_{ij} + b_{ij}| \} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij} + b_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \\
&\quad + \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |b_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij} + b_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \|T+S\|_2 + \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |b_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \|T+S\|_2
\end{aligned}$$

よって両辺を $\|T+S\|_2$ でわれば ($\|T+S\|_2 = 0$ のときはいつでも成立するので $\|T+S\|_2 \neq 0$ としてよい)

$$\|T+S\|_2 \leq \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |b_{ij}|^2 \right\}^{1/2} = \|T\|_2 + \|S\|_2.$$

以上より $\|T\|_2$ は T のノルムとなる.
　$\|T\|_B$ について: $T = (a_{ij}), S = (b_{ij})$ とする.
(i)

$$\begin{aligned}
\|T\|_B &= \max_{j=1,2,\ldots,N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

もし $\|T\|_B = 0$ ならば, $\max_{j=1,2,\ldots,N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| = 0$ より $|a_{ij}| = 0$ ($^\forall i, j = 1, 2, \ldots, N$). すなわち $T = O$. 逆に, $T = O$ ならば, $|a_{ij}| = 0$ ($^\forall i, j = 1, 2, \ldots, N$) より $\|T\|_B = 0$.

(ii)

$$
\begin{aligned}
\|rT\|_2 &= \max_{j=1,2,\ldots,N} \sum_{i=1}^{N} |ra_{ij}| \\
&= |r| \max_{j=1,2,\ldots,N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| \\
&= |r| \|T\|_B \quad ({}^\forall r \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\|T+S\|_B &= \max_{j=1,2,\ldots,N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}+b_{ij}| \\
&\leq \max_{j=1,2,\ldots,N} \sum_{i=1}^{N} \{|a_{ij}|+|b_{ij}|\} \\
&\leq \max_{j=1,2,\ldots,N} \left\{ \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| + \sum_{i=1}^{N} |b_{ij}| \right\} \\
&\leq \max_{j=1,2,\ldots,N} \left\{ \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| \right\} + \max_{j=1,2,\ldots,N} \left\{ \sum_{i=1}^{N} |b_{ij}| \right\} \\
&= \|T\|_B + \|S\|_B.
\end{aligned}
$$

以上より $\|T\|_B$ は T のノルムとなる.

これにより講義で紹介した次の性質を示します:

> $T=(a_{ij})$ を N 次正方行列 ($N \times N$ 行列) とする. このとき
>
> $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T^k$$
>
> で定義される行列は $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ や $\|\cdot\|_B$ の意味である行列 T_∞ に収束する.

ε-N 論法で示す.

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T^k \right\| &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \|T^k\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \|T\|^k \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|T\|^k \\
&= e^{\|T\|} < \infty
\end{aligned}
$$

に注意する. ただし $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ や $\|\cdot\|_B$ のように,

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k$$

が成立するノルムを選ぶ. ここで, 級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|T\|^k$$

は収束するので $(e^{\|T\|})$

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|T\|^k$$

は収束実数列である, すなわちコーシー数列である. よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!}\|T\|^k = |S_n - S_m| < \varepsilon \quad ({}^\forall n, m; n > m \geq N_\varepsilon).$$

これにより

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}T^k - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}T^k \right\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!}T^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!}\|T^k\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!}\|T\|^k \\ &< \varepsilon \quad ({}^\forall n, m; n > m \geq N_\varepsilon) \end{aligned}$$

すなわち, $\sum_{k=0}^{n}(1/k!)T^k$ が $\|\cdot\|$ の意味でコーシー列になっている. 補題 2 より, ある N 次正方行列 T_∞ が存在して,

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}T^k - T_\infty \right\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を得る. □

注　この行列 T_∞ のことを e^T とかく.

補題 1. $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ とする. このとき

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_j| \leq \left\{ \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 \right\}^{1/2}$$

証明　$\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2 = 0$, もしくは $\sum_{i=1}^{N}|y_i|^2 = 0$ のときは, $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, もしくは $y_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ となり, 不等式が成立する. よって, 以下 $\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2 \neq 0$, $\sum_{i=1}^{N}|y_i|^2 \neq 0$ として話を進める. $\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2 = 1$, $\sum_{i=1}^{N}|y_i|^2 = 1$ のとき.

$$|x_i y_i| \leq \frac{1}{2}|x_i|^2 + \frac{1}{2}|y_i|^2$$

より

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}|x_iy_i| &\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}|y_i|^2\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\
&=1\\
&=\left\{\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{N}|y_i|^2\right\}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

一般に $m(x) := \{\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2\}^{1/2}$, $m(y) := \{\sum_{k=1}^{N}|y_k|^2\}^{1/2}$ とおくと仮定より $m(x) \neq 0$, $m(y) \neq 0$ で

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{x_i}{m(x)}\right|^2 &= \frac{1}{\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2}\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2 = 1,\\
\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{y_i}{m(y)}\right|^2 &= \frac{1}{\sum_{k=1}^{N}|y_k|^2}\sum_{i=1}^{N}|y_i|^2 = 1.
\end{aligned}
$$

よって, $\tilde{x}_i := x_i/m(x)$, $\tilde{y}_i := y_i/m(y)$ に上の計算を用いれば

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}|\tilde{x}_i\tilde{y}_i| &\leq \left\{\sum_{i=1}^{N}|\tilde{x}_i|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{N}|\tilde{y}_i|^2\right\}^{1/2},\\
\sum_{i=1}^{N}\frac{|x_iy_i|}{m(x)m(y)} &\leq \left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{|x_i|^2}{m(x)^2}\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{|y_i|^2}{m(y)^2}\right\}^{1/2},
\end{aligned}
$$

ここで両辺を $m(x)m(y)$ 倍すれば

$$
\sum_{i=1}^{N}|x_iy_j| \leq \left\{\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{N}|y_i|^2\right\}^{1/2}
$$

を得る. □

補題 2. $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ や $\|\cdot\|_B$ のようなノルムに関する, 行列のコーシー列 $\{T_n\}$ はある行列 T_∞ に収束する.

証明 $\{T_n\}$ を行列のコーシー列とする. すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$
\|T_n - T_m\| < \varepsilon \quad ({}^\forall n, m; n > m \geq N_\varepsilon).
$$

$T_n = (a_{ij}^{(n)})$ とおく. $i, j = 1, 2, \ldots, N$ とする.

$$
|a_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(m)}| \leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(m)}| = \|T_n - T_m\|_1,
$$

$$
|a_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(m)}| \leq \left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(m)}|^2\right\}^{1/2} = \|T_n - T_m\|_2,
$$

$$|a_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(m)}| \le \max_{j=1,2,\dots,N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(m)}| = \|T_n - T_m\|_B$$

これにより, いずれのノルムを考えても

$$|a_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(m)}| < \varepsilon \quad ({}^{\forall} n, m; n > m \ge N_\varepsilon)$$

が得られるので $\{a_{ij}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー数列になっているので, $\mathbb{R}$ の完備性からある $a_{ij} \in \mathbb{R}$ が存在して

$$a_{ij}^{(n)} \to a_{ij} \quad (n \to \infty).$$

そこで, $T_\infty = (a_{ij})$ とおけば

$$\|T_n - T_\infty\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}^{(n)} - a_{ij}| \to 0,$$

$$\|T_n - T_\infty\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}^{(n)} - a_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \to 0,$$

$$\|T_n - T_\infty\|_B = \max_{j=1,2,\dots,N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}^{(n)} - a_{ij}| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を得る. □

性質 1. $\|T\|_B$ は $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ なる線形作用素とみたときの作用素ノルムすなわち

$$\|T\|_B = \sup_{x \in \mathbb{R}^N; x \neq 0} \frac{|Tx|}{|x|}$$

となっている. ただし, ここでは $|x| := \sum_{k=1}^{N} |x_k|$ を意味する.

証明　$T = (a_{ij})$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ とし

$$|x| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N|$$

に注意する.

$$\begin{aligned}
|Tx| &= \left| \sum_{k=1}^{N} a_{1k} x_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N} a_{2k} x_k \right| + \cdots + \left| \sum_{k=1}^{N} a_{Nk} x_k \right| \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k \right| \\
&\le \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} |a_{ik}||x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{N} |x_k| \sum_{i=1}^{N} |a_{ik}| \\
&= \sum_{k=1}^{N} |x_k| \max_{j=1,2,\dots,N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| \\
&= \|T\|_B |x|.
\end{aligned}$$

よって $x \neq 0$ なる任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\frac{|Tx|}{|x|} \leq \|T\|_B$$

より

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N; x \neq 0} \frac{|Tx|}{|x|} \leq \|T\|_B.$$

一方, $\|T\|_B := \max_{j=1,2,\ldots,N} \sum_{i=1}^N |a_{ij}|$ より, 最大値を実現する j_0 が存在する, すなわち

$$\|T\|_B := \max_{j=1,2,\ldots,N} \sum_{i=1}^N |a_{ij}| = \sum_{i=1}^N |a_{ij_0}|$$

j_0 番目だけ 1 である $x_0 := (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ に対して,

$$|Tx_0| = |a_{1j_0}| + |a_{2j_0}| + \cdots + |a_{Nj_0}| = \|T\|_B,$$

$$|x_0| = 1.$$

よって

$$\frac{|Tx_0|}{|x_0|} = \|T\|_B,$$

ゆえに

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N; x \neq 0} \frac{|Tx|}{|x|} \geq \|T\|_B.$$

以上より成立. □

注: これらの話は試験に出ません.