2021/7/15

令和 3 年度 偏微分方程式 課題

定期試験前の自学自習に用いてください.

問 1 $X = C([0,1])$ とする. $\|\cdot\|_X$ を

$$\|v\|_X := \max_{x\in[0,1]} |v(x)|$$

によって定義する. 次の問いに答えよ.

(1) $\|\cdot\|_X$ は X のノルムとなることを証明せよ.

(2) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X の関数列とする. u_n が $u \in X$ に $[0,1]$ 上一様収束するならばまたそのときに限り

$$\|u_n - u\|_X \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であることを証明せよ.

問 2 次の関数は I 上でリプシッツ連続かどうか判定せよ.

(1) $f(x) = \sqrt{x}$, $(I = [0,1])$.

(2) $f(x) = x^2$, $(I = [0,1])$.

問 3 $Q, F \in C([0,\infty))$ とする. 次の微分方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) - Q(t)y(t) = F(t) \quad t > 0, & (1) \\ y(0) = 0. & (2) \end{cases}$$

このとき, グリーン関数

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)\exp\left(\int_\xi^t Q(s)ds\right)$$

を用いて求めた

$$y(t) = \int_0^\infty G(t,\xi)F(\xi)d\xi$$

は (1), (2) を満たすことを示せ. ただし H は以下で定義される関数である:

$$H(t) := \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ 1 & (t \geq 0). \end{cases}$$

以上